LOGARITMOS

"Logaritmo de um número a, real e positivo, numa base b, positiva e diferente da unidade, é o expoente x, ao qual se eleva a base b para obter-se uma potência igual ao número a".

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Em:

$$\log_b a = x \begin{cases} a \Rightarrow \text{logaritmando ou antilogaritmo} \\ b \Rightarrow \text{base} \\ x \Rightarrow \text{logaritmo} \end{cases}$$

C.E.

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \ \text{ e } b \neq 1 \end{cases}$$

CONSEQÜÊNCIAS DA DEFINIÇÃO

A partir da definição, sempre que existirem os logaritmos envolvidos, temos:

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^n = n$
- $b^{\log_b a} = a$
- $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Sempre que existirem os logaritmos envolvidos, teremos:

- logaritmo de um produto.

$$\log_b (M.N) = \log_b M + \log_b N$$

- logaritmo de um quociente.

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

- logaritmo de uma potência.

$$\log_b M^n = n.\log_b M$$

ANTILOGARITMOS

$$b^x = N \Leftrightarrow N = \text{antilog}_b x$$

SISTEMAS

- Base decimal

$$\log_{10} M = \log M$$

- Base neperiana

$$\log_e M = \ln M \text{ ou } LM$$

EXECÍCIOS

01. Calcule

a) $\log_2 32$

b) $\log_3 \frac{1}{27}$

c) $\log_{\sqrt{3}} 243$

02. Calcule logaritmo de $\frac{1}{64}$ na base 0,25.

NÚMEROS COMPLEXOS

Número Complexo é todo número da forma z = a +bi com a, b $\in$ R e $i = \sqrt{-1}$; a é a parte real e bi é a parte imaginária.

$$\begin{cases} \bullet \text{ Se } b = 0 \Rightarrow Z = a \text{ é real} \\ \bullet \text{ Se } a = 0 \text{ e } b \neq 0 \Rightarrow Z = bi \text{ é imaginário puro} \end{cases}$$

IGUALDADE

$$z_1 = z_2 \Rightarrow a + bi = c + di \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b = d \end{cases}$$

MULTIPLICAÇÃO

Multiplicando dois números complexos de acordo com a regra da multiplicação de binômios e sabendo que $i^2 = -1$, temos:

$$(a + bi)\ (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

CONJUGADO

Sendo z = a + bi, define-se como complexo conjugado de z o complexo $\overline{Z} = a - bi$, isto é:

$$z = a + bi \Rightarrow \overline{Z} = a - bi$$

DIVISÃO

"É só multiplicar e dividir pelo conjugado do denominador".

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{z_2 . \overline{z_2}}$$

POTÊNCIAS DE *i*

Para calcular o resultado de uma potência inteira de *i*, divide-se o expoente por 4 e, observando-se o valor do resto, obtém-se o resultado através da tabela abaixo.

Resto	i^{resto}	Valor da potência
0	i^3	1
1	i^1	i
2	i^2	-1
3	i^3	- i

Exemplo:

$i^{253} = i^1 = i$

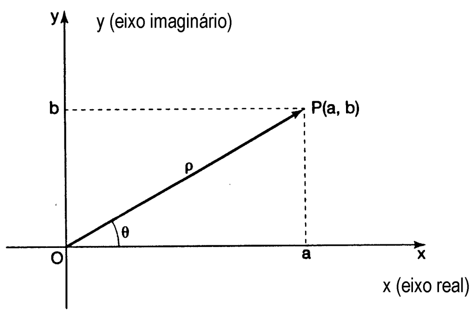
$$\begin{array}{r|l} 253 & 4 \\ \hline 13 & 63 \\ 1 & \end{array}$$

MÓDULO

Módulo de z = a + bi:

$$|z| = |a + bi| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA



- P (a, b) $\Rightarrow$ Afixo ou imagem do complexo.
- r = |z| = módulo.
- ($0 \le q < 2\pi$) é o argumento.

Observe:

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

Sabemos que:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = r\cos\theta$$

$$\text{sen } q = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = r \text{ sen } \theta$$

Substituindo-se em z = a + bi:

$$z = r\cos\theta + r \text{ sen } \theta \,.\, i \therefore$$
$$z = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$$

POLINÔMIOS

DEFINIÇÃO

Denomina-se função polinomial ou polinômio toda função definida pela relação:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Em que:

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados coeficientes.

$n \in$ IN;
$x \in$ C é a variável.

Observações:

1ª. Se $a_n \neq 0$, o expoente máximo *n* é dito grau do polinômio e indicamos gr(P) = n.
2ª. Se P(x) = 0, não se define o grau do polinômio.
3ª. P(a) é denominado valor numérico de P(x) para x = a.
4ª. Se P(a) = 0, o número *a* é denominado raiz ou zero de P(x).

POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Dois polinômios A(x) e B(x) são iguais ou idênticos quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável x.

$A(x) = B(x) \Rightarrow A(a) = B(a), \forall\ a \in C$

Princípio de Identidade de Polinômios (P.I.P.)

A condição necessária e suficiente para que dois polinômios *A* e *B* sejam idênticos é que os coeficientes dos termos de mesmo grau sejam iguais.

Algebricamente:

$A(x) \equiv B(x) \Rightarrow a_i = b_i, \forall_i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

Polinômio identicamente nulo

Denomina-se polinômio identicamente nulo o polinômio que tem todos os seus coeficientes nulos.

Indicamos por $P(x) \equiv 0$ (lê-se: P(x) é idêntico a zero).

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Efetuar a divisão de um polinômio P(x) por outro d(x) é determinar dois polinômios Q(x) e R(x) que satisfaçam as seguintes condições:

$$\left\{\begin{array}{ll} P(x) & \underline{|d(x)} \\ \\ R(x) & Q(x) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1^a)\ P(x) = Q(x) \,.\, d(x) + R(x) \\ 2^a)\ gr(R) < gr(d)\ ou\ R(x) = 0 \end{array}\right.$$

Em que:

P(x) é o dividendo;
d(x) é o divisor;
Q(x) é o quociente;
R(x) é o resto.

TEOREMA DO RESTO

Seja a divisão de um polinômio P(x) por um binômio do 1º Grau, $x - \alpha$

$$\begin{array}{ll} P(x) & \underline{|x - \alpha} \\ R & Q(x) \end{array}$$

$P(x) = (x - \alpha) \,.\, Q(x) + R$

Teorema do resto: o resto da divisão de um polinômio em x, por $x - \alpha$, é dado pelo valor numérico desse polinômio para $x = \alpha$, ou seja, $R = P(\alpha)$.

TEOREMA DE D'ALEMBERT

Se r = 0, então $P(\alpha) = 0$, isto é, P(x) é divisível por $x - \alpha$ e α é a raíz de P(x).

Se P(x) for divisível por $(x - \alpha)$ e por $(x - \beta)$, com $\alpha \neq \beta$, também será divisível por $(x - \alpha)(x - \beta)$.

DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

O quociente da divisão de um polinômio em x, do grau n, por um binômio $x - \alpha$, é um polinômio do grau n – 1.

Exemplo:

$(3x^3 + 2x^2 - 4x + 3) : (x - 1)$

$$\begin{array}{c|l} 1 & 3\ \ 2\ \ -4\ \ 3 \\ \hline & \underline{3\ \ 5\ \ 1}\ \ \boxed{4} \rightarrow \text{resto} \\ & \text{Quocientes} \\ & \text{de } Q(x) \end{array}$$

$Q(x) = 3x^2 + 5x + 1$

SUPERINTENSIVO - M 01

05. O valor de a para que o polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 - x + a$ seja divisível por $x - 2$ é:

a) – 20
b) – 22
c) – 17
d) – 15
e) – 13

06. Obtenha o quociente e o resto da divisão de $x^4 + 1$ por $x - 1$, aplicando RUFFINI

a) $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e $R(x) = 2$
b) $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ e $R(x) = x + 1$
c) $Q(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ e $R(x) = 3$
d) $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ e $R(x) = -2$
e) $Q(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ e $R(x) = -x + 1$

07. A soma dos coeficientes do desenvolvimento $(2x^2 + 5x - 6)^{20}$ é:

a) – 2
b) 2
c) – 1
d) 0
e) 1

GABARITO

01.	**B**	*02.*	**A**	*03.*	**B**	*04.*	**D**
05.	**B**	*06.*	**A**	*07.*	**E**		

EXERCÍCIOS

01. Calcule **a** sabendo-se que 1 é raiz da equação $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + a = 0$

02. Resolver a equação $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = 0$ sabendo que $x = 1$ é uma das raízes.

03. Qual a multiplicidade da raiz $x = 1$, na equação $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

04. Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação

$2x^3 + 4x^2 - 5x + 8 = 0$ calcule $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

05. Uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raízes $x = 3$, $x = i$ e $x = 2 + i$. Qual é o menor grau que deve ter esta equação?

06. Quantas raízes reais a equação $P(x) = 3x^3 - 8x = 0$ pode apresentar no intervalo $]1, 3[$?

SUPERINTENSIVO - M 01

EXECÍCIOS PROPOSTOS

01. A equação $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ pode apresentar no intervalo $]-2, 1[$, quantas raízes reais

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

02. Resolver a equação $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ sabendo que $x = i$ é uma de suas raízes.

a) $\{i, -i, 2\}$
b) $\{i, -i, 3\}$
c) $\{i, -i, 1\}$
d) $\{i, 2, 3\}$
e) $\{-i, 1, 0\}$

03. A soma das raízes da equação $4x(x + 1)(x - 2) . (x + 2) = 0$ é:

a) 3
b) -2
c) 2
d) -1
e) 0

04. Uma equação polinomial com coeficientes reais, admite $1 + i$ com multiplicidade 2, 3 como raiz tripla e $2 + 3i$ como raiz simples podemos concluir que o menor grau dessa equação é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

05. Sendo x_1, x_2, x_3 as raízes da equação

$2x^3 + 4x^2 - 5x + 8 = 0$, calcule $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10